Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points A(-2 , 2 , 8) , B(6 , 6 , 0) , C(2 , -1 , 0) , D(0 , 1 , -1) et l'ensemble (S) des points M tel que $\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MB} = 0$

0,75 1) Calculer $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$, puis en déduire que : $x + 2y + 2z = 0$ est une équation du plan (OCD)

0,5 2) Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 4, 4)$ et de rayon $R = 6$

0,5 3) a) Calculer la distance de $\Omega(2, 4, 4)$ au plan (OCD)

0,5 b) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S)

0,75 c) Vérifier que : $\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OB} = 0$. Puis, en déduire que O est le point de tangence de (OCD) et (S)

Exercice 2 (3 points) :

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points A , B et C d'affixes respectives : $a = 2 - 2i$, $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $c = 1 - \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 1)$

1 1) déterminer une forme trigonométrique de chacun des nombres a et b

2) on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

0,75 a) Soient z et z' les affixes respectives d'un point M et de son image M' par R

Montrer que : $z' = bz$

0,5 b) Vérifier que le point C est l'image du point A par R

0,75 c) Montrer que : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)[2\pi]$. Puis, déterminer un argument de c

Exercice 3 (3 points) :

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément 3 boules de l'urne et on considère les événements suivants :

A : « Obtenir 3 boules de même couleur »

B : « Obtenir 3 boules de couleurs deux à deux différentes »

1 1) Montrer que : $p(A) = \frac{3}{44}$ et $p(B) = \frac{3}{11}$

2) Notons X la variable aléatoire égale au nombre de couleurs des 3 boules tirées

1 a) Déterminer les valeurs possibles de X

1 b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer E(X) et V(X)

Exercice 4 (2 points) :

0,25 1) Vérifier que : $\forall x \neq -3 \quad , \quad \frac{x}{3+x} = 1 - \frac{x}{3+x}$

0,75 2) Montrer que : $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{3+x}\, dx = 1 - 3\ln(2)$

1 3) En intégrant par parties, montrer que : $\int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\, dx = -\int_{-2}^{-1} \frac{x}{3+x}\, dx$

Problème (9 points) :

I. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)$

Et en désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité

0,75 graphique 1cm

1) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} + 1\right)^2 + 1$ et en déduire que f est définie sur

0,75 $\mathbb{R}$ et que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

1 2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ln(4)$ et interpréter graphiquement ce résultat

1 3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ et vérifier que : $f'(0) = 0$

0,25 b) Étudier le signe de l'expression $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f est croissante sur

0,5 $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$

0,25 4) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

0,5 b) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$

0,25 5) a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$

0,5 b) Étudier le signe des expressions : $\sqrt{e^x} - 2$ et $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$ sur $\mathbb{R}$

0,75 c) En déduire que : $\forall x \in [0, \ln(4)] \quad , \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$

d) Montrer que ; $\forall x \in [0, \ln(4)] \quad , \quad f(x) \leq x$

6) Construire la courbe (C_f) (on donne $\ln(4) \approx 1{,}4$ et on admet que (C_f) admet deux points d'inflexion : l'une d'abscisse inférieur à -1 et l'autre d'abscisse supérieure à 2)

0,75 II. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+1} = f(u_n)$

0,75 (on pourra utiliser les résultats précédents dans les questions suivantes)

1 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad 0 \leq u_n \leq \ln(4)$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite